EXEMPLES DE RAISONNEMENTS PAR RÉCURRENCE (simple & double)

① UNE RÉCURRENCE SIMPLE

Démontrons par récurrence que 8^n-1 est un multiple de 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « 8^n-1 est un multiple de 7 »

I) INITIALISATION

Pour $n=0$, on a $8^n-1 = 8^0-1 = 1-1$
$= 0 = 7 \times 0$.

C'est bien un multiple de 7, donc la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

II) HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$8^n-1 = 7k \quad \text{soit} \quad 8^n = 1+7k$$

De ce fait,

$$\begin{aligned} 8^{n+1}-1 &= 8 \times 8^n - 1 \\ &= 8(1+7k)-1 \\ &= 8+7\times 8k-1 \\ &= 7\times 8k+7 \\ &= 7(\underbrace{8k+1}_{\in \mathbb{N}}) \end{aligned}$$

C'est un multiple de 7, ce qui prouve que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

III) CONCLUSION

D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier 8^n-1 est un multiple de 7

② UNE RÉCURRENCE DOUBLE

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 8 \text{ et } u_1 = 21 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que $u_n = 3\times 2^n + 5\times 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 3\times 2^n+5\times 3^n$ »

I) INITIALISATION

Pour $n=0$: $3\times 2^0+5\times 3^0 = 3+5 = 8 = u_0$

Pour $n=1$: $3\times 2^1+5\times 3^1 = 6+15 = 21 = u_1$

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

II) HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Alors :

$$u_n = 3\times 2^n + 5\times 3^n$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3\times 2^{n+1} + 5\times 3^{n+1} \\ &= 3\times 2\times 2^n + 5\times 3\times 3^n \\ &= 6\times 2^n + 15\times 3^n \end{aligned}$$

d'où $5u_{n+1} - 6u_n = 12\times 2^n + 45\times 3^n$

soit $u_{n+2} = 3\times 4\times 2^n + 5\times 9\times 3^n$

$$= 3\times 2^2\times 2^n + 5\times 3^2\times 3^n$$
$$= 3\times 2^{n+2} + 5\times 3^{n+2}$$

si bien que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

(II) CONCLUSION

D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = 3\times 2^n + 5\times 3^n}$$

(3) COMPLÉMENT CULTUREL

Une suite géométrique de raison q vérifie
$$u_{n+1} = q u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
et admet pour expression
$$u_n = u_0 \times q^n$$

Cela fait penser à l'équation différentielle
$$y' = ay$$
dont les solutions sont les fonctions $f_C : t \mapsto \underbrace{Ce^{at}}_{C\times (e^a)^t}$

Lorsque l'on a affaire à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de la forme
$$u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$$
on procède exactement comme avec une équation différentielle linéaire du second ordre

- On résout l'équation caractéristique
$$r^2 = ar + b$$
- Si elle admet deux racines (complexes) distinctes r_1 et r_2, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour expression
$$u_n = A\times r_1^n + B\times r_2^n$$
les constantes A et B étant déterminées à l'aide de u_0 et u_1
- Si l'équation caractéristique admet une seule racine r_0, la suite a alors pour expression
$$u_n = (An+B)\, r_0^n$$

Ces résultats se démontrent facilement par récurrence... c'est un excellent exercice !